

Algoritmi i strukture podataka

Elektrijada 2022 - Sunčev Breg, Bugarska

Zadatak 1

Dato je N izgledom identičnih loptica, od kojih je jedna teža od svih ostalih, a ostalih $N-1$ loptica su iste težine. Koliko najmanje merenja je potrebno odraditi na vagi sa dva tase, tako da otkrijemo sa sigurnošću koja je loptica teža?

U jednom merenju moramo postaviti isti broj loptica na oba tase, a vaga će prevagnuti na jednu stranu ukoliko je među lopticama na tom tasu ona koja je teža, ili ostati u ravnoteži ukoliko loptica koja je teža nije ni na jednom tasu.

Primer: Ukoliko je $N=4$, potrebno je najmanje 2 merenja. Npr. u prvom merenju možemo staviti loptice $\{1,2\}$ na levi tas i loptice $\{3,4\}$ na desni tas, jedan od ova dva tase mora biti teži. Ukoliko je to levi tas, u drugom merenju ćemo postaviti na levi tas samo lopticu $\{1\}$ a na desni samo lopticu $\{2\}$ i videti koja je teža od njih. Isto bismo proverili i sa lopticama $\{3\}$ i $\{4\}$ ukoliko bi u prvom merenju bio teži desni tas.

Ispisati minimalni broj merenja za dati broj loptica:

a)	2 poena	$N = 22$
b)	4 poena	$N = 2022$
c)	8 poena	$N = 2022303340445055$

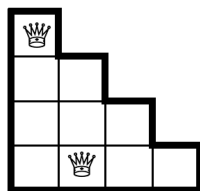
Zadatak 2

Koliko najviše šahovskih kraljica možemo postaviti na tablu dimenzija $N \times N$ koja je isečena stepenasto iznad glavne dijagonale (videti primer ispod), tako da se nijedne dve kraljice ne napadaju?

Kraljice se napdaju ukoliko se nalaze u istom redu, ili istoj koloni, ili na istoj dijagonali. Polja koja napada jedna kraljica su prikazana na dijagramu desno.

			•			•
•			•		•	
	•	•	•	•		
•	•	♔	•	•	•	
	•	•	•			
•		•			•	
		•				•

Primer: Na stepenasto isečenu tablu dimenzija 4×4 možemo postaviti najviše dve kraljice tako da se ne napadaju (pogledati sliku ispod).



Jedna od mogućih postavki
za tablu dimenzija 4x4

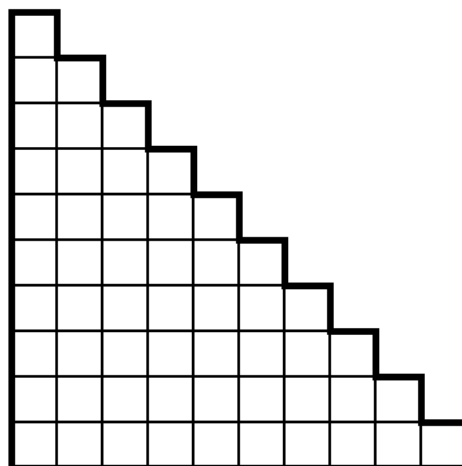


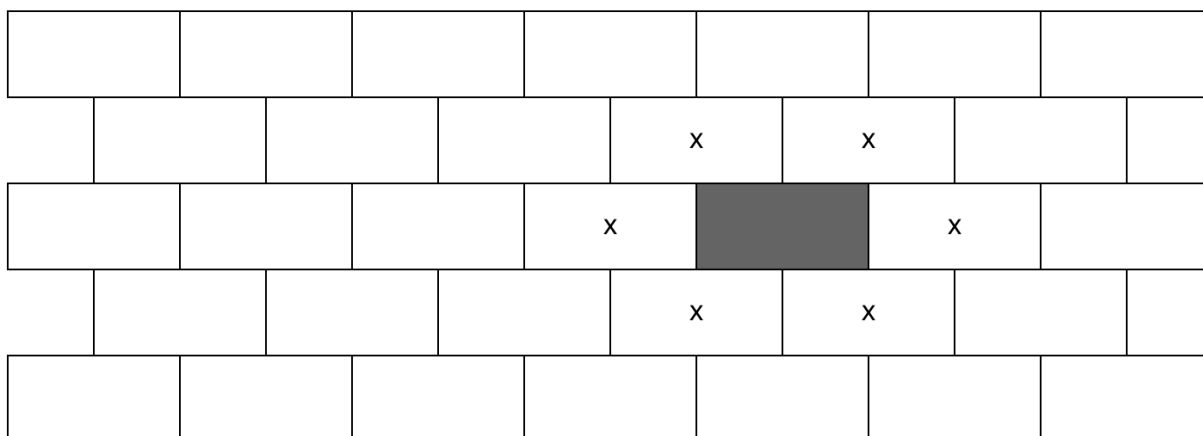
tabla dimenzija 10x10

Ispisati najveći broj kraljica koje se ne napadaju za datu dimenziju isečene table:

a)	5 poena	N = 10
c)	15 poena	N = 2022

Zadatak 3

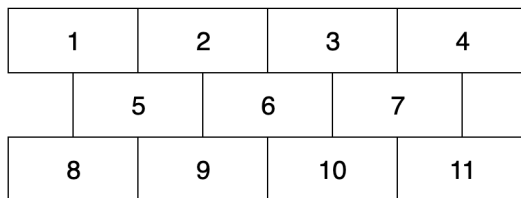
Dat je zid koji se sastoji od N redova cigala, gde se u svakom neparnom redu nalazi po M cigala, a u svakom parnom po M-1 cigla uvucena za pola cigle.



Zid gde je N=5 i M=7

Koliko postoji načina da ofarbamo po tačno jednu ciglu u svakom redu (ukupno će onda biti N ofarbanih), tako da se nijedne dve ofarbane cigle ne dodiruju. Na slici iznad je obojena jedna cigla, i slovom X su one koje je dodiruju.

Primer: Za $N=3$ i $M=4$, postoji 12 načina. Ukoliko cigle obeležimo brojevima od 1 do 11 kao na slici ispod, onda su validna bojenja: $\{1,6,8\}$, $\{1,6,11\}$, $\{1,7,8\}$, $\{1,7,9\}$, $\{2,7,8\}$, $\{2,7,9\}$, $\{3,5,10\}$, $\{3,5,11\}$, $\{4,5,10\}$, $\{4,5,11\}$, $\{4,6,8\}$, $\{4,6,11\}$




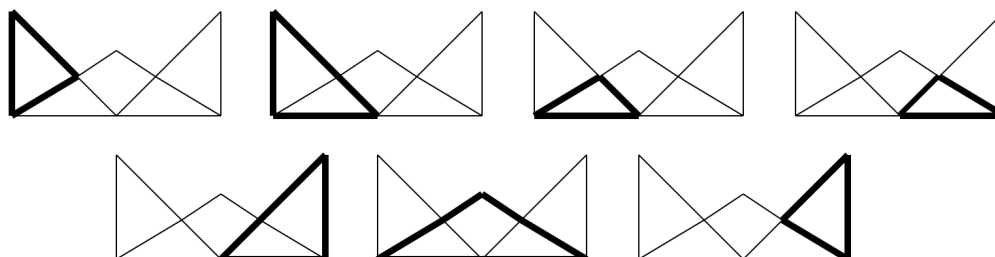
Ispisati broj načina za date dimenzije zida:

a)	3 poena	$N=3, M=2022$
b)	5 poena	$N=45, M=3$
c)	8 poena	$N=45, M=4$
d)	10 poena	$N=9, M=15$

Zadatak 4

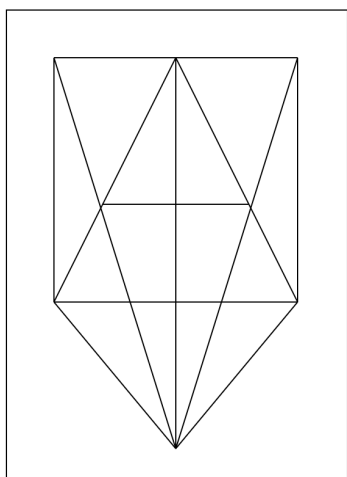
Izbrojati koliko postoji trouglova na datoj slici.

Primer:  Na ovoj slici postoji 7 trouglova.

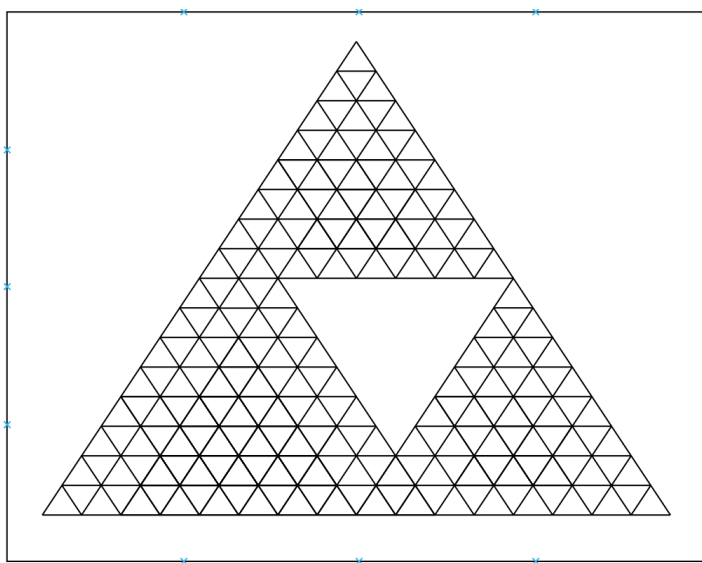


Ispisati broj trouglova za datu sliku:

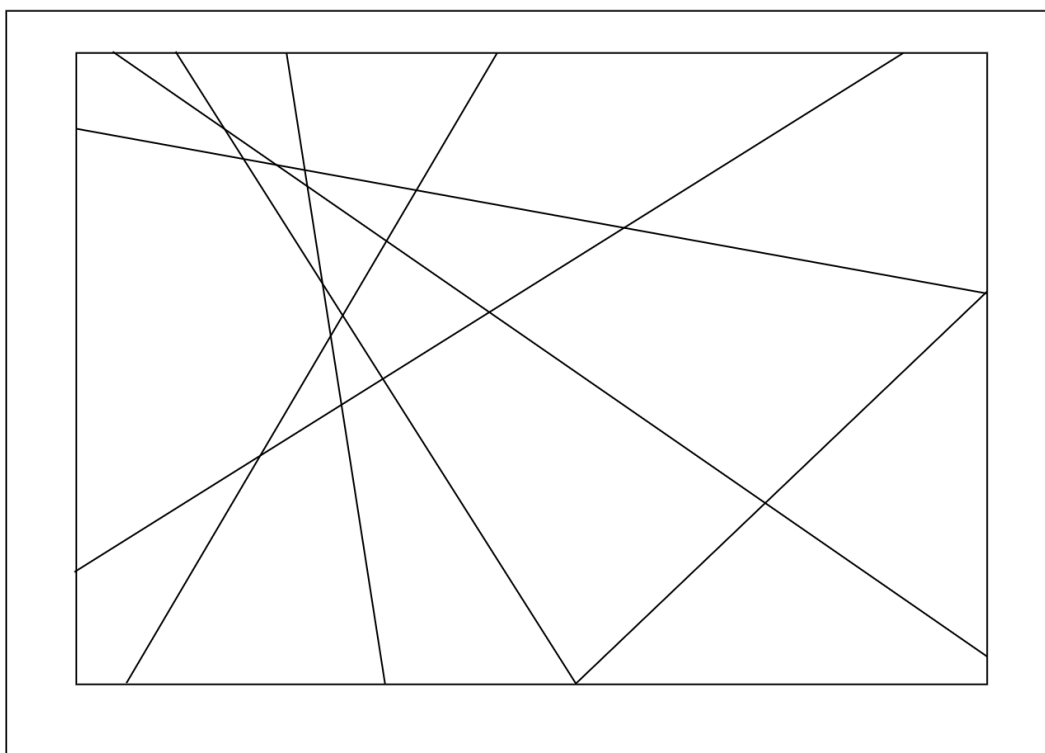
a)	9 poena	Ispisati rešenje za sliku 4.1
b)	13 poena	Ispisati rešenje za sliku 4.2
c)	11 poena	Ispisati rešenje za sliku 4.3



slika 4.1



slika 4.2



slika 4.3

Zadatak 5

Dat je niz A koji se sastoji od N prirodnih brojeva. Odrediti koji broj je K-ti po veličini u tom nizu.

Primer: Za niz A = [1, 15, 7, 29, 3, 2, 15, 35, 2] i K=7, broj 15 bi bio rešenje jer je sedmi po veličini, odnosno sedmi broj u sortiranom nizu: [1, 2, 2, 3, 7, 15, 15, 29, 35].

Ispisati traženi broj za dati niz i parametar K:

a)	4 poena	N = 43, K = 22, niz A je dat u tabeli 5.1
b)	7 poena	N = 1022, K = 533, niz A je dat u tabeli 5.2 niz A je uređen tako da elementi prvo rastu, pa zatim opadaju
c)	10 poena	N = 1022, M = 22, niz A je dat u tabeli 5.3
d)	16 poena	N = 1022, M = 511, niz A je dat u tabeli 5.3 (isti kao pod c)

43960 61827 8407 69041 85790 99949 10912 62077 7051 37469 67719 74947 13575 51723 4922 75602 40198 8307 7580 3373 11345 18464 49226 22676 28632 6201 63227 9650 14909 36695 35910 37216 1238 13002 10024 41962 14863 16807 54009 97893 94089 37069 20417

Tabela 5.2, Zadatak 5, niz A u primeru pod a)

1	82	120	144	194	237	268	272	310	342	346	351	371	407	424	438	468	475	498	500	504	556	614
621	659	696	711	716	743	761	764	765	793	814	817	875	902	921	921	924	981	1043	1059	1095	1108	1123
1146	1159	1218	1225	1325	1373	1391	1395	1422	1457	1511	1535	1616	1625	1761	1974	1985	2046	2052	2110	2122	2151	2200
2226	2269	2284	2345	2430	2458	2586	2629	2661	2675	2681	2774	2913	2926	2974	3001	3049	3058	3066	3127	3303	3358	3526
3526	3576	3591	3725	3738	3777	3779	3780	3782	3812	3929	3993	3998	4145	4181	4203	4216	4299	4346	4502	4527	4541	4554
4593	4630	4670	4745	4823	4956	5100	5178	5269	5284	5318	5515	5545	5591	5699	5716	5734	5753	5773	5886	5907	5949	5954
6054	6138	6165	6173	6261	6266	6275	6294	6383	6529	6543	6609	6661	6783	6786	6796	6797	6813	6829	6920	6933	6975	7034
7044	7073	7171	7225	7229	7231	7239	7278	7278	7279	7298	7299	7340	7350	7358	7368	7372	7412	7444	7486	7497	7506	7509
7625	7638	7708	7711	7712	7722	7728	7731	7752	7760	7802	7809	7819	7835	7871	7906	7911	7951	7976	8028	8030	8046	8061
8092	8115	8115	8164	8165	8175	8210	8220	8262	8284	8296	8303	8304	8340	8379	8382	8387	8396	8402	8464	8487	8534	8541
8554	8564	8596	8633	8673	8699	8704	8721	8760	8786	8789	8817	8864	8874	8896	8926	8985	9003	9029	9044	9063	9072	9073
9087	9112	9121	9140	9172	9195	9200	9211	9224	9227	9227	9239	9242	9243	9247	9250	9287	9313	9342	9359	9375	9391	
9412	9432	9433	9503	9509	9520	9524	9524	9532	9534	9544	9584	9591	9596	9606	9608	9615	9640	9642	9646	9668	9719	9744
9751	9754	9768	9791	9795	9811	9846	9858	9869	9880	9884	9889	9901	9917	9972	9991	9988	9982	9970	9969	9962	9945	9942
9925	9918	9915	9914	9902	9900	9895	9894	9885	9882	9867	9857	9841	9833	9832	9809	9805	9794	9786	9785	9776	9767	9755
9750	9743	9716	9713	9708	9695	9686	9670	9667	9664	9659	9654	9641	9630	9629	9627	9626	9619	9609	9597	9594	9564	9564
9552	9550	9534	9518	9511	9481	9473	9472	9464	9447	9443	9439	9435	9408	9402	9385	9360	9340	9339	9332	9306	9305	9295
9275	9273	9262	9260	9256	9254	9251	9246	9209	9208	9190	9189	9185	9183	9171	9167	9156	9155	9144	9140	9131	9126	9124
9116	9103	9095	9091	9081	9073	9072	9054	9048	9039	9028	9027	9018	9003	9003	9001	8988	8983	8978	8973	8964	8962	8962
8961	8959	8957	8955	8943	8940	8940	8924	8921	8920	8915	8909	8902	8898	8896	8893	8888	8860	8859	8855	8843	8838	8808
8795	8788	8755	8754	8751	8739	8736	8727	8725	8716	8710	8696	8693	8686	8666	8664	8663	8663	8652	8648	8643	8643	8639
8636	8627	8610	8604	8602	8586	8584	8570	8560	8555	8545	8524	8511	8511	8501	8481	8479	8472	8453	8430	8399	8397	8391
8387	8387	8387	8354	8354	8341	8334	8316	8313	8303	8301	8280	8274	8273	8263	8251	8244	8241	8214	8210	8209	8191	8164
8154	8134	8132	8131	8115	8094	8081	8073	8069	8062	8044	8038	8030	8021	8015	7995	7987	7975	7975	7974	7964	7957	7950
7941	7934	7921	7914	7912	7889	7878	7874	7871	7869	7867	7859	7843	7838	7836	7823	7818	7804	7800	7800	7800	7791	7766
7760	7726	7725	7725	7721	7721	7711	7710	7702	7687	7678	7675	7673	7665	7656	7654	7654	7629	7615	7607	7602	7591	7589
7587	7575	7573	7573	7569	7567	7565	7560	7556	7546	7543	7534	7532	7528	7527	7527	7519	7515	7501	7497	7476	7458	7446
7446	7445	7438	7432	7431	7430	7417	7378	7367	7361	7360	7353	7353	7343	7333	7328	7315	7307	7294	7294	7292	7286	7260
7257	7245	7229	7209	7203	7200	7200	7189	7178	7175	7172	7149	7113	7100	7067	7050	6999	6920	6917	6906	6863	6854	6834
6818	6802	6801	6790	6755	6738	6736	6731	6694	6679	6673	6631	6596	6575	6522	6508	6507	6430	6396	6389	6386	6371	6357
6346	6320	6299	6286	6251	6248	6241	6231	6211	6195	6182	6168	6139	6138	6120	6116	6104	6091	6029	6029	6027	5975	5952
5943	5871	5840	5829	5814	5798	5791	5778	5774	5761	5749	5742	5734	5724	5705	5679	5636	5634	5632	5629	5620	5578	5577
5559	5552	5540	5497	5496	5491	5481	5481	5416	5413	5413	5395	5366	5366	5355	5349	5311	5301	5273	5210	5195	5191	5182
5179	5176	5153	5139	5130	5115	5100	5089	5084	5030	4932	4924	4882	4875	4828	4818	4811	4756	4730	4679	4668	4661	4655
4644	4639	4629	4553	4541	4532	4506	4503	4500	4471	4426	4422	4421	4394	4368	4349	4342	4317	4302	4281	4281	4273	4202
4201	4177	4154	4147	4106	4083	4063	4024	4011	3954	3920	3919	3918	3902	3877	3866	3860	3780	3772	3727	3676	3656	3629
3628	3628	3595	3592	3561	3545	3544	3536	3486	3461	3457	3411	3408	3398	3377	3339	3330	3318	3312	3297	3207	3200	3198
3171	3158	3148	3109	3105	3104	3084	3064	3063	3054	3048	3021	3003	2958	2934	2870	2856	2804	2800	2799	2770	2760	2738
2709	2676	2612	2603	2580	2536	2530	2510	2464	2458	2437	2392	2364	2359	2299	2285	2280	2273	2270	2227	2208	2205	2194
2157	2152	2120	2112	2081	2065	2059	2051	2041	2009	2003	1996	1971	1937	1917	1915	1915	1905	1881	1877	1858	1822	1822
1799	1768	1734	1729	1706	1687	1684	1617	1598	1591	1570	1565	1555	1551	1493	1468	1462	1457	1409	1382	1381	1379	1367
1342	1340	1310	1294	1287	1284	1276	1275	1274	1272	1251	1218	1189	1181	1092	1059	1023	1008	1005	1000	967	944	917
895	875	872	867	864	864	859	813	811	779	777	776	772	771	752	748	731	695	680	668	653	574	573
555	532	530	527	506	486	475	472	464	449	417	415	337	315	299	296	280	264	260	240	212	186	183
132	123	121	120	117	114	91	42	8	1													

Tabela 5.2, Zadatak 5, niz A u primeru pod b)

8815	8110	8059	9067	4516	9814	1383	9856	9606	4559	2785	6657	3656	4447	5174	2150	1052	8096	8851	8312	3450	4435	3630
4883	3604	7152	2317	7201	7226	8797	6316	5681	2551	5457	1397	2206	5362	3676	9711	5708	8951	3777	7620	9402	6268	2889
7474	2580	7353	7221	6280	8200	1202	4427	5608	2737	7160	5907	2528	6316	9810	5437	7714	8871	3900	8216	9369	5648	4173
6579	6460	3757	6616	7388	7690	8619	3645	7411	5588	5258	4592	8771	4013	8819	3797	5021	3784	8375	7076	8765	8833	8789
5380	5015	6292	8773	9370	5954	7862	3532	9020	8346	6086	4323	3677	3089	2893	2318	5502	5850	8660	7122	4771	3988	9750
8607	5915	3912	6705	6089	6807	9313	8459	5320	5599	9577	2723	4178	9798	5746	7708	3402	2781	6915	7342	9947	8869	3924
9235	4503	4011	6077	9193	5133	4434	7602	5962	7188	5254	3193	3433	8446	9477	5883	8016	9989	7503	7576	8678	8467	3710
2204	9215	6169	8503	7771	8820	8120	5343	6864	5267	9653	6149	8058	5466	9240	2242	4647	3217	6528	2488	3699	9612	4302
8740	3187	8208	8754	7535	2636	2966	5921	2090	7734	8246	6823	4806	3434	5461	1908	7327	2823	6604	7274	3724	7147	2317
3153	7397	2113	4054	5439	5965	1863	5233	3606	6048	4297	8239	5404	7385	9287	5356	8816	4876	3157	7863	7450	2990	9721
3195	9431	2419	2788	9837	9635	6883	9949	6441	1133	6821	8015	9806	6830	4429	7841	8841	8239	3043	8634	7351	9187	6599
5397	5075	6404	5792	4068	6300	3205	7073	8098	9766	6316	3103	6774	3842	6579	7976	2040	6495	2442	5715	6112	7200	2916
9977	5722	6969	3188	9261	5809	5400	8610	2812	9903	4318	8949	7103	7942	4865	8050	5370	4875	2618	2196	9521	8621	4298
2591	5565	9051	7590	3402	3204	4655	2590	6973	8364	9048	6276	7945	8001	2061	5256	3991	5851	2334	7755	4523	2176	7585
8000	6687	9311	8818	8634	2935	6350	3619	3080	7524	5962	9429	6404	9321	8733	7204	5650	6178	5083	2616	8399	2392	6415
6861	7545	8497	9995	8358	8570	9973	2519	4252	8558	2544	7194	8881	9457	3841	9410	8659	8044	3737	6325	3156	2705	4422
6447	7475	5649	6559	4901	6705	6739	8444	3970	4907	6105	2713	7744	4488	2599	2954	2579	7540	5900	6181	9762	3189	6940
5096	6370	4831	8615	4111	6386	8560	5314	9576	8391	3674	2676	5688	2377	7499	1367	2479	9990	3512	7121	7840	2439	2543
9140	9729	3603	8311	8570	8652	5725	4260	6338	6434	9775	7395	7966	8863	2615	3826	9395	9887	4196	2338	2072	6561	4975
6514	2498	6270	6586	9608	2878	7543	9698	3617	2669	3339	7479	2263	9946	9761	6682	2557	4312	9939	9579	8598	7270	3762
8197	7112	8046	8561	4592	9430	6592	6063	4593	7150	4867	3916	4989	8642	5799	9896	7933	8111	4096	6719	7484	8376	9439
9265	7931	6638	6550	5664	9822	5181	3550	9650	6013	8658	9061	5991	7250	4150	1575	3702	6709	5144	9362	5125	7410	3644
8768	9714	4571	1336	9630	2910	8820	5422	5455	8369	5041	5655	7555	8425	7163	7983	2100	7339	2954	8819	5270	7931	4892
9314	6436	8601	8821	6233	8015	4457	4373	8503	9598	3323	4621	7831	7519	8659	2894	9354	7016	3211	1120	3146	5153	4080
4750	4605	9150	7960	8848	6129	5039	7805	4276	4531	8494	9870	4023	3069	5976	9696	6918	2769	8575	9105	7232	9194	2153
9510	5774	9076	2185	7203	8066	7589	2867	9843	4011	1049	2263	5460	9532	8092	3747	7079	2308	5064	4722	7717	6602	6474
6985	9362	3003	2333	6597	2720	2944	1722	9099	5348	8290	9743	7528	2048	3214	4148	8352	6394	1156	8207	7376	3121	6245
2791	8541	5337	2702	8680	3082	8739	3151	5002	4937	5685	6927	3795	7287	2022	5644	2889	9314	2129	5231	4981	8933	6200
6095	6368	9333	2302	4183	4448	4160	3569	9998	9486	5640	7482	3259	3307	4933	1209	2800	7479	2518	9600	2123	3982	8744
2333	4808	3501	2179	7917	9713	7874	7828	6843	7659	9114	3722	8127	6287	7678	3372	4402	6630	8867	5915	9873	8783	9263
6831	2319	5344	4160	9717	6223	3144	6050	6919	8684	2188	2154	7425	3979	8807	6555	8834	2738	7300	2887	6205	4380	2510
1281	3091	6266	4611	5318	7058	5456	9028	5880	7134	6789	7556	7521	7582	4219	3618	3634	5384	6437	8593	9085	8765	9192
4165	3399	3469	6880	6613	1789	8837	2023	7197	4231	3744	8009	5315	9731	9389	7491	8351	2506	8301	4879	6240	7457	9877
5178	4259	8914	9794	4461	7334	6780	3884	7357	9038	4215	6174	8329	9728	2889	8687	3696	8480	7334	6054	3223	6877	7767
3807	8352	3725	2711	4382	5104	9784	2561	2719	5306	6163	7956	9412	9668	5504	8087	6175	5790	3231	9362	9687	3016	3948
5404	6841	2391	9129	6415	9471	5887	8275	6479	3105	8489	8531	3193	6589	4490	9953	4524	4027	8302	3287	8625	5018	2906
3681	5189	3615	3636	7278	9169	7503	8117	5262	3585	5343	8177	2821	3595	4752	9681	7963	1176	2474	5197	6330	2383	5336
3884	6878	2656	5786	8478	4084	6644	3751	5922	6517	6454	6984	3828	9475	7112	3253	8825	7800	8704	8522	3034	6536	3648
3623	4777	3161	7777	8174	5982	8141	3676	9932	7341	9168	8813	7936	7261	6124	9093	3491	6940	5897	7711	9078	7719	6002
6443	9913	5234	8638	2987	9348	5002	5723	2155	7831	7178	4940	8563	3511	4478	3893	9702	6795	4959	7468	6504	9246	5361
6527	5001	9149	6650	9418	2305	2215	6847	2641	8017	7265	5745	2633	2957	9148	7465	9181	4714	3980	6139	5283	6678	9370
7750	8043	8506	8692	6411	9481	6984	6202	7360	7531	7929	6214	2503	7189	8666	5094	6085	2527	9132	1439	6877	6638	6884
7309	5282	6920	5316	7572	4014	7664	9103	6591	9702	5126	3855	7093	2373	2534	4502	5265	5153	7783	9893	7349	9641	3070
8839	3476	9032	6636	1922	4686	6536	7401	5297	5837	3652	2157	6904	4041	7486	9979	4727	7021	7484	5445	8584	8266	2542
9410	3012	8810	6835	7027	6052	7978	8494	8064	9166													

Tabela 5.3, Zadatak 5, niz A u primeru pod c) i pod d)

List za odgovore

1.	a)		2	
	b)		4	
	c)		8	
2.	a)		5	
	b)		15	
3.	a)		3	
	b)		5	
	c)		8	
	d)		10	
4.	a)		9	
	b)		13	
	c)		11	
5.	a)		4	
	b)		7	
	c)		10	
	d)		16	
			Σ	